- La duración del examen será de 1 hora.
- La nota del examen será la media aritmética de los problemas propuestos.
- La fecha de publicación de notas y el plazo de solicitud de revisión se anunciará en Moodle.

**Problema 1.** Se considera la ecuación $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5 = 0.$

1.1. Probar que dicha ecuación tiene una raíz s en el intervalo [2 , 3].

1.2. Dar la ecuación que implementa el método de Newton para calcular s. Si se inicializa el método con $x_0$=2, calcular la primera iteración $x_1$.

1.3. Si $x_0$=2.5, analizar si el método de Newton converge y dar una cota del error que se comete en la iteración n-ésima en función de n.

1.4. Si $x_0$=2.5, atendiendo a las estimaciones del error $E_k = |x_k - s| \approx |x_{k+1} - x_k|$ de la tabla adjunta, se pide:
- ¿Cuántas iteraciones garantizan que se han calculado 6 decimales exactos de la solución?
- ¿Cuál es el orden de convergencia que se espera del método? Justificar las respuestas.

| Estimación de $E_k$ |
|---|
| $E_0 \approx 2.14\text{e}-01$ |
| $E_1 \approx$ 2.33e-02 |
| $E_2 \approx$ 3.04e-04 |
| $E_3 \approx$ 5.12e-08 |
| $E_4 \approx$ 1.78e-15 |

**Problema 2.** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} - 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{\alpha} + 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha \neq 0$$

Se pide:

a) Calcular la factorización $LU$ de la matriz $A$ (sin permutación de filas ni columnas), e indicar para qué valores de $\alpha$ es válida dicha factorización.
   $L =$ Matriz triangular inferior con $l_{ii} = 1; i = 1,2$
   $U$ = Matriz triangular superior

b) Calcular el determinante de $A$ utilizando la factorización $LU$ anterior (cuando ésta exista).

c) Si $\alpha = -1$, calcular la segunda columna de $A^{-1}$ utilizando la factorización $LU$.

## SOLUCIONES:

**Problema 1.** Se considera la ecuación $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5 = 0$.

1.1. La función f(x) es continua en todo R, en particular en el intervalo [2 , 3], además se comprueba que cambia de signo en los extremos de dicho intervalo (f(2)=-5<0 y f(3)=4>0). Por tanto, aplicando el Teorema de Bolzano se concluye que la ecuación f(x) tiene una raíz en el intervalo [2 , 3].

1.2. La expresión del método iterativo de Newton aplicado a este caso:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^{\,3} - 2x_k^{\,2} - 5}{3x_k^{\,2} - 4x_k} = \frac{2x_k^{\,3} - 2x_k^{\,2} + 5}{3x_k^{\,2} - 4x_k}$$
$$k = 0,1,2,\ldots$$

donde $x_k$ denota el valor de la solución aproximada obtenida en la iteración k-ésima.
Aplicando la fórmula anterior al caso $x_0=2$, efectuando convenientemente las operaciones se obtiene $x_1=3.25$.

1.3. Estudiamos la convergencia del método de Newton para el caso $x_0=2.5$. Para ello consideramos la siguiente cota del error $e_n$ que se comete en la iteración n-ésima:

$$\boxed{\mathrm{e}_n = |x_n - s| \le \frac{1}{m}\left(m\mathrm{e}_0\right)^{2^n}} \quad (1) \quad \text{con m=}\frac{\max\limits_{x\in[2,3]} |f''(x)|}{2\min\limits_{x\in[2,3]} |f'(x)|}$$

1. Calculamos m=$\dfrac{\max\limits_{x\in[2,3]} |f''(x)|}{2\min\limits_{x\in[2,3]} |f'(x)|}$

- Estudiamos $f''(x) = 6x - 4$ es una función monótona y positiva en $[2,3]$:
  $8=f''(2) \le f''(x) \le f''(3) = 14$ si $x \in [2,3] \to \max\limits_{x\in[2,3]} |f''(x)| = 14$
- $f'(x)$ en $[2,3]$ es monótona en $[2,3]$ por ser $f''(x) > 0$ en $[2,3]$. Por tanto:
  $\max\limits_{x\in[2,3]} |f'(x)| = \max\limits_{x\in[2,3]} \{|f'(2)|, |f'(3)|\} = 4$

Por tanto: $\quad$ m=$\dfrac{\max\limits_{x\in[2,3]} |f''(x)|}{2\min\limits_{x\in[2,3]} |f'(x)|} = \dfrac{14}{2*4} = 1.75 \quad (2)$

2. Por otra parte, en nuestro caso $\mathrm{e}_0 = |2.5 - s| < 0.5$ (3), por estar s en (2,3) y ser $x_0$ el punto medio del intervalo.

De (2) y (3), se obtiene que $m\mathrm{e}_0 < \dfrac{1.75}{2} = 0.875 < 1$.

Por tanto $(m\mathrm{e}_0)^{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, utilizando la cota del error (1) vemos que $\mathrm{e}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y la sucesión converge.

Teniendo en cuenta los valores anteriores, sustituyendo en (1), obtenemos una cota del error:

$$e_n \le \frac{1}{m}(me_0)^{2^n} \le \frac{4}{7}(0.875)^{2^n}.$$

1.4. Si $x_0$=2.5, atendiendo a las estimaciones del error de la tabla adjunta, se observa que el error absoluto a partir de la tercera iteración $E_n = |x_n - s| \approx |x_n - x_{n+1}| < 10^{-6}$ si $n \ge 3$, por tanto a partir de esta iteración 3 las soluciones aproximadas garantizan al menos 6 decimales exactos de la solución.
Por otra parte, atendiendo a los datos de la tabla se observa que al menos $E_{n+1} \approx kE_n{}^2,\ k \ne 0$, o lo que es lo mismo, en cada nueva iteración se duplican (al menos) el nº de decimales exactos (k=0 ->1, k=1 ->2, k=2 ->4, k=3 ->8,..), por tanto el método es de orden dos.

**Problema 2.**

a) Factorización $A = LU$ que se puede hacer por eliminación gaussiana o por el algoritmo de Doolittle

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} - 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{\alpha} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{\frac{1}{\alpha} - 1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} - 1 & 1 \\ 0 & \frac{\frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{\alpha} - 1} \end{pmatrix}$$

Esta factorización de $A = LU$ solo es válida cuando $\alpha \ne 1$ ($\alpha \ne 0$ por enunciado del problema)

b) Si $A = LU$ ; $det(A) = det(L)det(U) = 1 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{\frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{\alpha} - 1}\right) = \frac{1}{\alpha^2}$ ; si $\alpha \ne 1$

Si $\alpha = 1$ ; $det(A) = \frac{1}{\alpha^2}$ $y$ $det(L)det(U) = \frac{0}{0}$

c) Se verifica:

$$AA^{-1} = I \to A \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La 2ª columna de $A^{-1}$ se calcula resolviendo el sistema: $A\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $\alpha = -1 \to A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y la factorización $LU$ es: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $y$ $U = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la ecuación del sistema anterior: $L\left(U\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si hacemos $U\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ nos queda $L\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, resolvemos dos sistemas más fáciles. Primero resolvemos el triangular inferior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; cuya\ solución\ es \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y posteriormente el triangular superior:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la 2ª columna de $A^{-1}$ es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & -1 \\ x_{21} & -2 \end{pmatrix}$$